**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**1 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Найдите сумму:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+…+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}} .$$

$ $**(7 баллов)**

**Ответ:** $1- \frac{1}{\sqrt{2020}}=\frac{\sqrt{2020}-1}{\sqrt{2020}}$.

**Решение:** Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}{(n+1)^{2}n-n^{2}(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}{(n+1)n(n+1-n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

то, учитывая условие задачи, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+…+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+…+\frac{1}{\sqrt{2019}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}=1-\frac{1}{\sqrt{2020}}=\frac{\sqrt{2020}-1}{\sqrt{2020}} .$$

**2.** Докажите, что для $a<1, b<1, a+b\geq \frac{1}{2} $ выполняется неравенство

$\left(1-a\right)\left(1-b\right)\leq \frac{9}{16} . $  **(7 баллов)**.

**Решение:** Так как $a<1, b<1,$ $ то 1-a>0, 1-b>0. $ Используя известное неравенство о средних, получим $\sqrt{\left(1-a\right)(1-b)}\leq \frac{\left(1-a\right)+(1-b)}{2}=1-\frac{a+b}{2}\leq \frac{3}{4}$ при условии, что $a+b\geq \frac{1}{2}, $то есть $\sqrt{\left(1-a\right)(1-b)}\leq \frac{3}{4}.$ Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\leq \frac{9}{16} . $ Таким образом, неравенство доказано.

**3.** Решите систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y-2018=\left(x-2019\right)⋅y, \\x+z-2014=\left(x-2019\right)⋅z,\\y+z+2=y⋅z.\end{array}\right. (7 баллов)$$

 **Ответ: (2022, 2, 4), (2018, 0,**$-$**2).**

**Решение:** Введем замену переменной $\tilde{x}=x-2019.$ Тогда система примет вид$ \left\{\begin{array}{c}\tilde{x}+y+1=\tilde{x}⋅y, \\\tilde{x}+z+5=\tilde{x}⋅z,\\y+z+2=y⋅z.\end{array}\right.$ Преобразуем систему к виду$: \left\{\begin{array}{c}\left(\tilde{x}-1\right)(y-1)=2, \\\left(\tilde{x}-1\right)(z-1)=6,\\\left(y-1\right)(z-1)=3.\end{array}\right.$ Сделаем замену переменных $a=\tilde{x}-1$, $ b=y-1$, $ c=z-1$. Тогда система примет вид:

$\left\{\begin{array}{c}ab=2, \\ac=6,\\bc=3.\end{array}\right.$ Перемножим уравнения системы и получим $a^{2}b^{2}c^{2}=36$, откуда получаем, что

 $ abc=\pm 6$. Используя последнее равенство, получим, что система в итоге имеет два решения: $\left\{\begin{array}{c}a=2, \\b=1,\\c=3.\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}a=-2, \\b=-1,\\c=-3.\end{array}\right.$ Тогда $\left\{\begin{array}{c}\tilde{x}-1=2, \\y-1=1,\\z-1=3.\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}\tilde{x}-1=-2, \\y-1=-1,\\z-1=-3.\end{array}\right.$ Следовательно,

$\left\{\begin{array}{c}\tilde{x}=3, \\y=2,\\z=4.\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}\tilde{x}=-1, \\y=0,\\z=-2.\end{array}\right.$ В итоге получаем 2 решения системы $\left\{\begin{array}{c}x=2022, \\y=2,\\z=4.\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}x=2018, \\y=0,\\z=-2.\end{array}\right.$

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек превосходного мела возросло на 80%, а обычного мела − уменьшилось не более чем на 10 пачек. Сколько всего пачек мела было в магазине сначала?

  **(7 баллов)**

**Ответ: 260 пачек.**

**Решение:** Пусть *x*$–$ исходное число пачек обычного мела, тогда число пачек необычного равно $\frac{4x}{3}$. Так как последнее число $–$ целое, то $x=3n$, где $ n\in N$. Следовательно, исходные количества пачек всех трех сортов составляют $3n$, $4n$, $6n$ соответственно.

После продаж и поставок количество превосходного мела составило $\left(1+0.8\right)6n=\frac{54n}{5}$, а необычного $–$ $\frac{54n}{5}∙\frac{5}{2}=\frac{27n}{4}$ пачек. Эти числа $–$ целые, следовательно, делятся на 4 и 5, то есть $ n=20m$, где $ m\in N$. Число пачек обычного мела будет равно $\frac{27n}{20}∙2=\frac{27n}{10}.$ Учитывая условие задачи (число пачек обычного мела уменьшилось не более чем на 10 пачек), получим$ 0<3n-\frac{27n}{10}=\left(60-54\right)m=6m\leq 10.$ Последнему неравенству удовлетворяет лишь одно натуральное число $m=1.$ Откуда следует, что $ n=20m=20$.

Таким образом, исходное количество пачек мела в магазине было равным

$3n$+$4n$+$6n=13n=13∙20=260$.

**5.** Расстояние между центрами $O\_{1} $и $O\_{2}$ окружностей $ω\_{1} $и $ω\_{2}$ равно $5r$, а их радиусы равны соответственно $r$ и $7r.$ Хорда окружности $ω\_{2}$ касается окружности $ω\_{1}$ и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды. **(7 баллов)**

**Ответ:** $7r\sqrt{3}$или$\frac{7r}{6}\sqrt{143}.$

**Решение:** Пусть$O\_{1} –$ центр первой окружности$ ω\_{1}$, точка *M* $– $точка касания этой окружности с хордой *AB.* Из центра $O\_{2} $второй окружности $ω\_{2} $проведем $O\_{2}K⊥$ *AB,* где точка *K* $–$середина хорды *AB.* Опустим $O\_{1}L⊥$$O\_{2}K$и рассмотрим три различных случая расположения хорды *AB* и центров $ O\_{1} $и $O\_{2}.$

**1)** Пусть $O\_{1},O\_{2} $лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* и $O\_{2}K\geq r $(рис.4). Так как $KL=O\_{1}M=r$, то $L$ лежит на отрезке $O\_{2}K.$ Пусть $AM=x$, тогда $AB=7x$, $BK=7x/2$, $MK=O\_{1}L=5x/2$. В прямоугольном $∆O\_{2}KB$ имеем $O\_{2}K=\frac{7}{2}\sqrt{4r^{2}-x^{2}}. $В прямоугольном $∆O\_{1}O\_{2}L$ имеем$ O\_{1},O\_{2}=5r$, $O\_{1}L=\frac{5x}{2}$ , откуда получаем, что $O\_{2}L=\frac{5}{2}\sqrt{4r^{2}-x^{2}}.$ Учитывая, что $O\_{2}L+KL=O\_{2}K$, получаем уравнение $r=\sqrt{4r^{2}-x^{2}}.$ Решая его, находим $x=r\sqrt{3}.$ Следовательно, $AB=7r\sqrt{3}.$

**2)** Пусть $O\_{1},O\_{2} $по-прежнему лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (рис.5), но $O\_{2}K<r$ (в частности, может быть $O\_{2}=K$, то есть *AB* - диаметр). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка $O\_{2}K$ , при этом$ O\_{2}K+O\_{2}L=KL$. Выражения для $O\_{2}K, O\_{2}L, KL $через *x* и *r* сохраняются, а уравнения для нахождения *x* примет вид $r=6\sqrt{4r^{2}-x^{2}}.$ Решая его, находим $ x=r\frac{\sqrt{143}}{6}.$ Следовательно, $AB=7r\frac{\sqrt{143}}{6}.$

**3)** Пусть $O\_{1},O\_{2} $лежат по разные стороны относительно прямой *AB* (рис.6). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка $O\_{2}K$ , при этом$ O\_{2}K+KL=O\_{2}L$. Выражения для $O\_{2}K, O\_{2}L, KL $через *x* и *r* сохраняются, а уравнения для нахождения *x* примет вид $r+\sqrt{4r^{2}-x^{2}}=0 $и решений не имеет.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**2 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите:
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+…+\frac{1}{2019\sqrt{2018}+2018\sqrt{2019}} .$$

$$ (7 баллов)$$

**Ответ:** $1- \frac{1}{\sqrt{2019}}=\frac{\sqrt{2019}-1}{\sqrt{2019}}$.

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**2.** Докажите, что для $a<1, b<1, a+b\geq \frac{1}{3} $ выполняется неравенство

$\left(1-a\right)\left(1-b\right)\leq \frac{25}{36} .$ **(7 баллов)**

**Решение:** Так как $a<1, b<1,$ $ то 1-a>0, 1-b>0. $ Используя известное неравенство о средних, получим $\sqrt{\left(1-a\right)(1-b)}\leq \frac{\left(1-a\right)+(1-b)}{2}=1-\frac{a+b}{2}\leq \frac{5}{6}$ при условии, что $a+b\geq \frac{1}{3}, $то есть $\sqrt{\left(1-a\right)(1-b)}\leq \frac{5}{6}.$ Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\leq \frac{25}{36} . $ Таким образом, неравенство доказано.

**3.** Решите систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y-2018=\left(y-2019\right)⋅x, \\y+z-2017=\left(y-2019\right)⋅z,\\x+z+5=x⋅z.\end{array}\right. (7 баллов)$$

**Ответ:** **(3, 2021, 4), (**$-1$**, 2019,**$-$**2).**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 2:3:6. После того как в магазин поступило некоторое количество пачек обычного и необычного мела общим числом не более 100 пачек, а 40% от пачек превосходного мела было продано, количественное соотношение изменилось и стало 5:7:4. Сколько всего пачек мела было продано в магазине? **(7 баллов)**

**Ответ: 24 пачки.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**5.** Расстояние между центрами $O\_{1} $и $O\_{2}$ окружностей $ω\_{1} $и $ω\_{2}$ равно $10r$, а их радиусы равны соответственно $5r$ и $6r.$ Прямая, пересекающая окружность $ω\_{1}$ в точках *М* и *N* касается окружности $ω\_{2}$ в точке *K*, причем *MN*=2*NK*. Найдите длину хорды *MN* .  **(7 баллов)**

**Ответ:** $2r\sqrt{21}$или$ 6r.$

**Решение:**  решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, отличие состоит в том, что возможны 2 случая расположения хорды и окружностей:

1) точка касания с окружностью$ ω\_{2}$ лежит вне окружности $ω\_{1}$; 2) точка касания с окружностью$ ω\_{2}$ лежит внутри окружности $ω\_{1}.$

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |